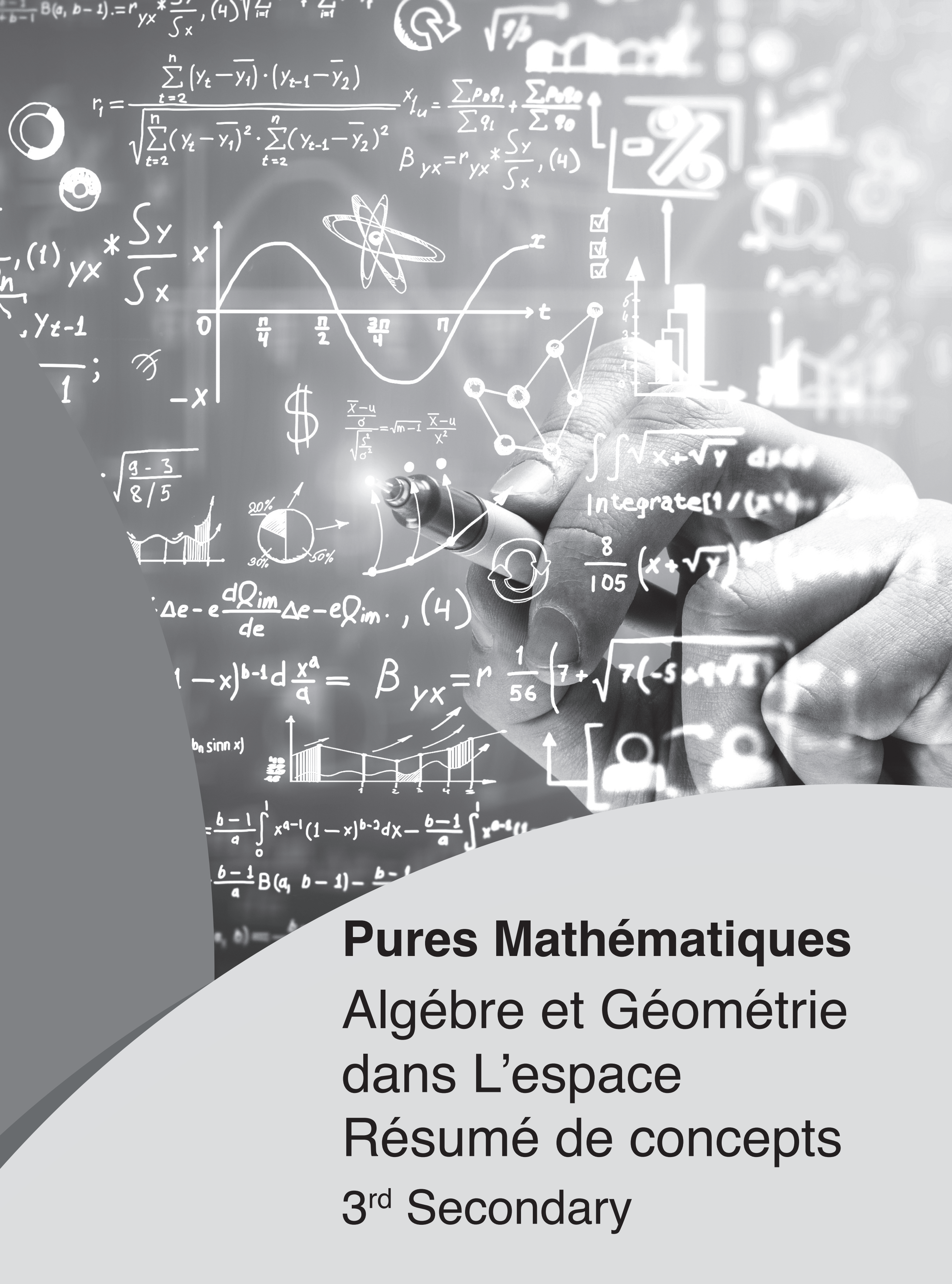


# Pures Mathématiques

## Algébre et Géométrie dans L'espace

## Résumé de concepts

3rd Secondary

Arrangements, Combinaisons et formule du binôme

1. $A_n^r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ pour tout $r \le n$, $r, n \in \mathbb{Z}^+$

2. $A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

3. $1! = 0! = 1$

4. $C_n^r = \dfrac{A_n^r}{r!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

5. $C_n^n = C_n^0 = 1$

6. $C_n^r = C_n^{n-r}$

7. Si $C_n^x = C_n^y$, alors $x = y$ ou $x + y = n$

8. $\dfrac{C_n^r}{C_n^{r-1}} = \dfrac{n-r+1}{r}$

9. $C_n^r + C_n^{r-1} = C_{n+1}^r$

10. $(x+a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \ldots + a^n$

$(x-a)^n = x^n - C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 - \ldots + (-a)^n$

11. $(x+a)^n + (x-a)^n = 2\big($la somme des termes de rangs impairs pris de termes de $(x+a)^n\big)$

12. $(x+a)^n - (x-a)^n = 2\big($la somme des termes de rangs pairs pris de termes de $(x+a)^n\big)$

13. $(1 \pm x)^n = 1 \pm C_n^1 x + C_n^2 x^2 \pm C_n^3 x^3 + \ldots + (\pm x)^n$

14. Le terme général dans le développement de $(x+a)^n$ est $t_{r+1} = C_n^r x^{n-r} a^r$

Le terme médian dans le développement de $(x+a)^n$

Si $n$ est un nombre impair, il y a deux termes médians de rangs $\dfrac{n+1}{2}, \dfrac{n+3}{2}$

Si $n$ est un nombre pair, il y a un terme médian unique de rang $\dfrac{n+2}{2}$

15. Dans le développement de $(x+a)^n$, le rapport entre deux termes consécutifs

$$\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{n-r+1}{r} \times \frac{a}{x}$$

16. Dans le développement de $(x+a)^n$ le rapport entre les coefficients des deux termes consécutifs $t_{r+1}$ et $t_r = \dfrac{n-r+1}{r} \times \dfrac{\text{le coefficient du deuxième}}{\text{le coefficient du premier}}$

## Nombre complexe

**Nombre complexe** : Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, le nombre de la forme $z = x + iy$ est appelé "nombre complexe de partie réelle $x$ et de partie imaginaire y où $i^2 = -1$

**Conjugué d'un nombre complexe :** est un nombre complexe, alors son conjugué est le nombre $\bar{z} = x - iy$ On a $\bar{z} + z$ est un nombre réel et $\bar{z}z$ est également un nombre réel

**Propriétés du nombre conjugué :**

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ 2) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ 3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

**Représentation géométrique d'un nombre complexe**: le nombre $z = x + iy$ est représenté par le point des coordonnées $(x ; y)$ dans le plan d'Argand.

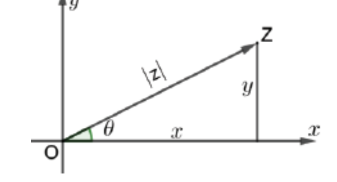
**Module et argument d'un nombre complexe** : Si le point des coordonnées $(x ; y)$ représente le nombre complexe z dans le plan d'Argand, alors $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

L'argument de z est déterminé par les deux relations $\cos\theta = \frac{x}{|z|}$ et $\sin\theta = \frac{y}{|z|}$

**Propriétés du module et de l'argument d'un nombre complexe**

1) $|z| = |\bar{z}|$ 2) $z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$

3) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ 4) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$




5) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

6) L'argument d'un nombre complexe peut prendre une infinité de valeurs en ajoutant un nombre entier de tours 2π.

7) L'argument qui appartient à l'intervalle $]-\pi; \pi]$ est appelé la détermination principale de l'argument du nombre complexe.

8) L'argument de z = - (l'argument de $\bar{z}$ )

9) L'argument de (-z) = (l'argument de z) - π

10) L'argument de $\frac{1}{z}$ = - (l'argument de z)

**Forme trigonométrique d'un nombre complexe** : C'est $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où

$r = |z|$ et θ est appelé la détermination principale de l'argument de z

## Multiplication et division de deux nombres complexes :

Si $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, alors

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$$

**Forme exponentielle d'un nombre complexe** (forme d'Euler) : Si z est un nombre complexe de module $r$ et d'argument principale θ, alors

$z = re^{i\theta}$ où θ est mesuré en radians.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

**Théorème de Moivre** : Si $n$ est un nombre entier, alors :

1) $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

2) si k est un nombre positif, alors $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{k}} = \cos\frac{\theta+2r\pi}{k} + i\sin\frac{\theta+2r\pi}{k}$

donc l'expression $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{k}}$ a prend plusieurs valeurs suivant les valeurs de r. Le nombre de ces différentes valeurs est égal à k. On obtient ces valeurs en posant

$r$ = … ; -2 ; -1 ; 0 ;1 ;2 ; …. Ces valeurs rendent l'argument $\frac{\theta+2r\pi}{k}$ appartient à ]-π; π]

## Racines cubiques de l'unité :

Si $z^3 = 1$ alors $z = 1$ ; $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ; $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

et ces racines sont notées $1$ ; $\omega$ ; $\omega^2$ où $\omega = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ; $\omega^2 = -\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}i$

## Propriétés des racines cubiques de l'unité :

(1) $\omega^3 = 1$ (2) $1 + \omega + \omega^2 = 0$ (3) $\omega^2 - \omega = \pm\sqrt{3}i$

**Racines nièmes de l'unité** : Si $z^n = 1$, alors

$$(\cos 0 + i \sin 0)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n} \quad où \ k \in \mathbb{Z}, \ \frac{2k\pi}{n} \in ]-\pi;\pi]$$

**Les racines nièmes de l'unité** sont représentées dans le plan d'Argand par les sommets d'un polygone régulier de $n$ sommets situés sur un cercle ayant pour centre le point d'origine et pour rayon l'unité.

## Déterminant et matrices

**Déterminant** : Un déterminant de rang n est constitué de n lignes et n colonnes. Il est formé en supprimant (n-1) variables de n équations linéaires.

### Propriétés des déterminants

La valeur d'un déterminant ne change pas quand on échange les lignes par les colonnes correspondantes.

La valeur d'un déterminant ne change pas si on le développe selon n'importe quelle ligne ou colonne.

Si on multiplie tous les éléments d'une ligne d'un déterminant (respectivement d'une colonne) par un même nombre réel, alors le déterminant obtenu est égal au déterminant initial multiplié par ce nombre.

La valeur d'un déterminant s'annule dans chacun des cas suivants :

Si tous les éléments d'une ligne (respectivement une colonne) d'un déterminant sont nuls, la valeur du déterminant s'annule

Si les éléments correspondants de deux lignes (respectivement deux colonnes) d'un déterminant sont égaux, la valeur du déterminant s'annule.

Si on intervertit les éléments de deux lignes d'un déterminant (respectivement deux colonnes), le déterminant se change en son opposé.

Si dans un déterminant une ligne (respectivement une colonne) peut être exprimée comme somme de deux lignes (respectivement deux colonnes), alors le déterminant est égal à la somme de deux déterminants.

Si on ajoute aux éléments d'une ligne d'un déterminant (respectivement une colonne) le produit des éléments correspondants d'une autre ligne (respectivement une autre colonne) par un nombre réel, la valeur du déterminant reste inchangée.

La valeur d'un déterminant triangulaire est égale au produit des éléments de sa diagonale principale.

**Pour trouver l'inverse d'une matrice carrée** de dimension $3 \times 3$ en utilisant la matrice des cofacteurs, on suit les étapes suivantes :

On trouve la valeur du déterminant de A où $\Delta_A \neq 0$

On calcule $A$ la matrice des cofacteurs des éléments de la matrice A

On calcule ${}^{t}A$ la matrice adjointe de A (la matrice des cofacteurs transposée).

On calcule l'inverse de la matrice par la relation : $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta_A} \times {}^{t}A$

## Système d'équations linéaires

### Résolution d'un système d'équations linéaires

En considérant que :

A est la matrice des coefficients, X est la matrice des variables

B est la matrice des constants

L'équation matricielle s'écrit sous la forme AX=B

La solution de cette équation est $X = A^{-1}B$

### Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice non nulle est le plus grand degré d'un déterminant ou d'un déterminant inférieur de la matrice de valeur est non nulle. Si une matrice A est non nulle, de dimension $m \times n$, alors le rang de la matrice A noté $\mathrm{rg}(A)$ où $1 \leq \mathrm{rg}(A) \leq \min(n;m)$.

**Matrice élargie** Si on dispose de $m$ équations linéaires à $n$ inconnues, on peut les écrire sous la forme AX=B. On définit la matrice élargie A* telle que :

$A^* = (A|B)$ et c'est une matrice de dimension $m \times (n+1)$

### Equations non homogènes

Le système d'équations mis sous la forme d'une équation matricielle AX = B est appelé système non homogène où $B \neq$ ▢

Un système formé de $n$ équations non homogènes à $n$ inconnues admet une solution unique si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) = n$, $\Delta_A \neq 0$

- Le système d'équations admet une infinité de solutions si $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=k$ et $k<n$
- Si $\text{rg}(A)\neq\text{rg}(A^*)$ le système d'équations n'admet pas de solutions

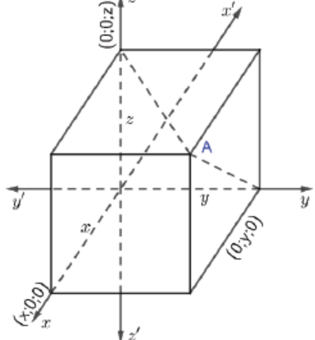
## Equations homogènes

Le système d'équations mis sous la forme d'une équation matricielle $AX=\square$ est appelé système homogène, Si

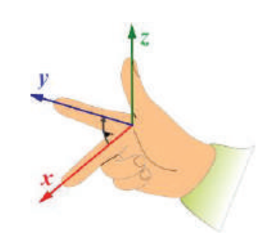
- $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=n$ (nombre d'inconnues), le système admet une solution unique appelée la solution nulle. (Elle est appelée également la solution évidente)
- $\text{rg}(A)<n$ (où $n$ est le nombre d'inconnues), $\Delta_A=0$, alors le système d'équations admet une infinité de solutions en plus de la solution nulle (la solution évidente)

## Géométrie et mesure dans trois dimensions

### Repère orthogonal dans trois dimensions




Les coordonnées d'un point A sont déterminées dans l'espace, en déterminant la projection de ce point sur chaque axe du repère.



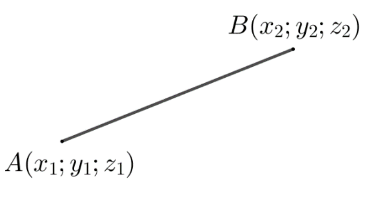

### Règle de la main droite

Dans cette règle les doigts courbés dans la figue indiquent le passage de la direction de l'axe des $x$ vers le sens positif de l'axe des y et la pouce indique le sens positif de l'axe des z

### Plans des repères

- Le plan cartésien XY a pour équation z = 0
- Le plan cartésien XZ a pour équation $y=0$
- Le plan cartésien YZ a pour équation $x=0$

### Distance entre deux points dans l'espace




Soient $A(x_1;y_1;z_1)$ et $B(x_2;y_2;z_2)$ deux points dans l'espace. La distance entre les deux points A et B est donnée par la relation

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

## Coordonnées du milieu d'un segment

Soient $A(x_1;y_1;z_1)$ et $B(x_2;y_2;z_2)$ deux points dans l'espace. Les coordonnées du point C qui est le milieu du segment $\overline{AB}$ sont $C\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2};\frac{z_1+z_2}{2}\right)$

## Equation d'une sphère dans l'espace

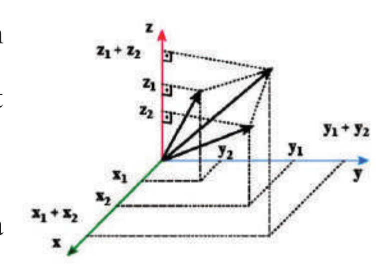
L'équation d'une sphère ayant pour centre $(k;m;n)$ et pour rayon r est

$(x-k)^2+(y-m)^2+(z-n)^2=r^2$

L'équation d'une sphère ayant pour centre le point d'origine et pour rayon $r$ est $x^2+y^2+z^2=r^2$

L'équation générale d'une sphère est $x^2+y^2+z^2+2kx+2my+2nz+d=0$ où $(-k;-m;-n)$ est son centre et $\sqrt{k^2+m^2+n^2-d}$ est la longueur de son rayon $r$ où $k^2+m^2+n^2>d$

## Vecteur de position dans l'espace




Si $A(A_x;A_y;A_z)$ est un point dans l'espace, alors son vecteur de position par rapport au point d'origine est $A=(A_x;A_y;A_z)$

$A_x$ est appelée la composante du vecteur A dans la direction de l'axe des $x$.

$A_y$ est appelée la composante du vecteur A dans la direction de l'axe des y.

$A_z$ est appelée la composante du vecteur A dans la direction de l'axe des z.

## Norme d'un vecteur

Si $A=(A_x;A_y;A_z)$, alors $\|A\|=\sqrt{(A_x)^2+(A_y)^2+(A_z)^2}$

## Addition et soustraction de vecteurs dans l'espace

Si $A=(A_x;A_y;A_z)$ et $B=(B_x;B_y;B_z)$, alors

1- $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}=(A_x+B_x;A_y+B_y;A_z+B_z)$

2- $\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}=(A_x-B_x;A_y-B_y;A_z-B_z)$

### Propriétés de l'addition

| | | |
|---|---|---|
| 1- | $\vec{A}+\vec{B}\in\mathbb{R}^3$ | stabilité |
| 2- | $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$ | commutativité |
| 3- | $(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$ | associativité |
| 4- | $\vec{A}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{A}=\vec{A}$ | élément neutre pour l'addition |
| 5- | $\vec{A}+(-\vec{A})=(-\vec{A})+\vec{A}=\vec{0}$ | opposé |

### Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Si $A=(A_x;A_y;A_z)$ et $k\in\mathbb{R}$ alors $kA=(kA_x;kA_y;kA_z)$

### Egalité de vecteurs dans l'espace

Si $(A_x;A_y;A_z)=(B_x;B_y;B_z)$, alors $A_x=B_x$ ; $A_y=B_y$ et $A_z=B_z$

**Vecteur unitaire** : C'est un vecteur dont la norme est égale à une unité de longueur

### Vecteurs unitaires de base

$i=(1;0;0)$ Vecteur unitaire dans le sens positif de l'axe des $x$

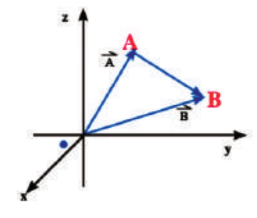
$j=(0;1;0)$ Vecteur unitaire dans le sens positif de l'axe des y

$k=(0;0;1)$ Vecteur unitaire dans le sens positif de l'axe des z

### Exprimer un vecteur en fonction des vecteurs unitaires de base

Si $A=(A_x;A_y;A_z)$, le vecteur A peut s'écrire sous la forme

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$




### Exprimer un segment orienté dans l'espace en fonction des coordonnées de ses extrémités

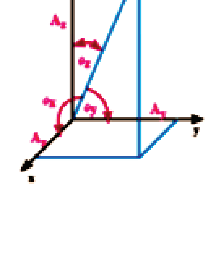
Si A et B deux points dans l’espace de vecteur de position A et B respectivement, alors $\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}$

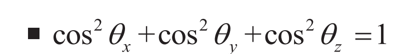
### Vecteur de position dans la direction d'un vecteur donné

Si $A=(A_x;A_y;A_z)$, le vecteur $e_A$ est appelé le vecteur unitaire dans la direction du vecteur A. Il est donné par la relation $e_A=\dfrac{A}{\|A\|}$

## Angles directeurs et les cosinus des angles directeurs d'un vecteur dans l'espace

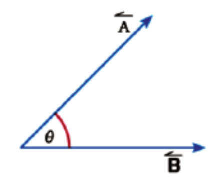
Si $(\theta_x;\theta_y;\theta_z)$ sont les mesures des angles que fait le vecteur $A=(A_x;A_y;A_z)$ avec les sens positifs de l'axe des x, l'axe de y et l'axe des z respectivement alors,



- $A_x=\|\overline{A}\|\cos\theta_x$, $A_y=\|\overline{A}\|\cos\theta_y$ et $A_z=\|\overline{A}\|\cos\theta_z$
- $(\theta_x;\theta_y;\theta_z)$ sont appelés les angles directeurs du vecteur $A$
- $\cos\theta_x$, $\cos\theta_y$ et $\cos\theta_z$ sont appelés les cosinus des angles directeurs du vecteur $A$
- $\cos\theta_x\,\vec{i}+\cos\theta_y\,\vec{j}+\cos\theta_z\,\vec{k}$ représente le vecteur unitaire dans la direction du vecteur $A$
- 
  $\cos^2\theta_x+\cos^2\theta_y+\cos^2\theta_z=1$

## Produit scalaire de deux vecteurs

Soient $A$ et $B$ deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ dont la mesure de l'angle entre eux est $\theta$




où $0\le\theta\le180°$, alors $\overline{A}\cdot\overline{B}=\|\overline{A}\|\cdot\|\overline{B}\|\cos\theta$

## Propriétés du produit scalaire

1- $\overline{A}\cdot\overline{B}=\overline{B}\cdot\overline{A}$ Commutativité

2- $\overline{A}\cdot(\overline{B}+\overline{C})=\overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot\overline{C}$ Distributivité

3- Si k est un nombre réel, alors $(k\,\overline{A}\cdot)\overline{B}=\overline{A}\cdot(k\,\overline{B})=k\,(\overline{A}\cdot\overline{B})$

4- $\overline{A}\cdot\overline{A}=\|\overline{A}\|^2$

5- $A\cdot B=0$ alors $\overline{A}\perp\overline{B}$ où $\overline{A}\neq\vec{0}$ et $\overline{B}\neq\vec{0}$

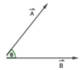
## Produit scalaire de deux vecteurs dans un repère orthogonal

Si $A=(A_x;A_y;A_z)$ et $B=(B_x;B_y;B_z)$,

alors $A\cdot B=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$

## Angle entre deux vecteurs

$$\cos\theta = \frac{A \cdot B}{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|} \text{ où } 0° \le \theta \le 180°$$

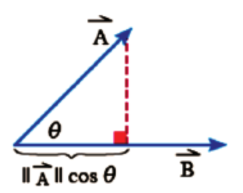


- Si $\cos\theta = 1$, alors $\vec{A} // \vec{B}$ et ils sont dans le même sens
- Si $\cos\theta = -1$, alors $\vec{A} // \vec{B}$ et ils sont dans deux sens contraires
- Si $\cos\theta = 0$, alors $\vec{A} \perp \vec{B}$

## La composante d'un vecteur dans la direction d'un autre vecteur

La composante algébrique du vecteur $A$ dans la direction du vecteur $B$ (notée $A_B$)

$$A_B = \|A\|\cos\theta = \frac{A \cdot B}{\|B\|}$$

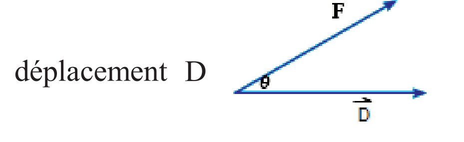



et la composante Vectorielle du vecteur $A$ dans la direction du vecteur $B$ est

$$\overrightarrow{A_B} = \frac{A \cdot B}{\|B\|^2}\vec{B}$$

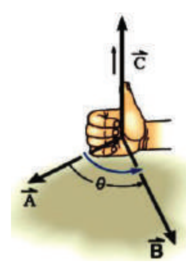
## Travail fourni par une force $F$ pour effectuer un déplacement D

Le travail $= \vec{F} \cdot \vec{D} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{D}\| \cos\theta$




- Si la force $F$ est dans le même sens que le déplacement $D$ $(\theta = 0°)$ alors, $T = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{D}\|$
- Si la force $F$ et le déplacement $D$ sont dans deux sens contraires $(\theta = 180°)$, alors $T = -\|\vec{F}\| \cdot \|\vec{D}\|$
- Si la force $F$ est orthogonale au déplacement $D$, alors $(\theta = 90°)$, alors T=0

## Produit vectoriel de deux vecteurs




Soient A et B deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ dont l'angle entre eux mesure θ, alors $\overline{A}\times\overline{B}=\|\overline{A}\|\cdot\|\overline{B}\|\sin\theta\,\vec{e}$ où e est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan contenant les deux vecteurs A et B. Le sens du vecteur unitaire e (vers le haut ou vers le bas) est déterminé selon la règle de la main droite. Dans cette main, les doigts courbés indiquent le sens de rotation du vecteur A vers le vecteur B et le pouce indique le sens du vecteur unitaire e

## Propriétés du produit vectoriel de deux vecteurs

1- $\overline{A}\times\overline{B}=-\overline{B}\times\overline{A}$

2- $\overline{A}\times\overline{A}=\vec{0}$

3- $\overline{A}\times\left(\overline{B}+\overline{C}\right)=\overline{A}\times\overline{B}+\overline{A}\times\overline{C}$ Distributivité

4- $\overline{A}\times\overline{B}=\vec{0}$ alors soit $\overline{A}//\overline{B}$ ou l'un au moins des deux vecteurs est égal à 0

5- $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{j}$

$\vec{i}\cdot\vec{k}=-\vec{j}$, $\vec{k}\cdot\vec{j}=-\vec{i}$, $\vec{j}\cdot\vec{i}=-\vec{k}$

## Produit vectoriel de deux vecteurs dans un repère cartésien

Si $A=\left(A_x;A_y;A_z\right)$ et $B=\left(B_x;B_y;B_z\right)$ sont deux vecteurs, alors

$$\overline{A}\times\overline{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

**Cas particulier** : Produit vectoriel de deux vecteurs dans un plan cartésien XY

Si $A=\left(A_x, A_y\right)$ et $B=\left(B_x, B_y\right)$, alors

$$\overline{A}\times\overline{B}=\begin{vmatrix}A_x & A_y\\ B_x & B_y\end{vmatrix}\vec{k}=\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\vec{k}$$

## Vecteur unitaire perpendiculaire au plan des vecteurs A et B

$$e=\frac{\overline{A}\times\overline{B}}{\left\|\overline{A}\times\overline{B}\right\|}$$

## Parallélisme de deux vecteurs

Deux vecteurs $A = (A_x ; A_y ; A_z)$ et $B = (B_x ; B_y ; B_z)$ s'ils vérifient l'une des conditions suivantes

1- $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$

2- $\dfrac{A_x}{B_x} = \dfrac{A_y}{B_y} = \dfrac{A_z}{B_z}$

3. $\vec{A} = k\,\vec{B}$

Si k > 0, les deux vecteurs $A$ et $B$ sont parallèles et dans le même sens.

Si k < 0, les deux vecteurs $A$ et $B$ sont parallèles et dans deux sens contraires.

## Signification géométrique du produit vectoriel de deux vecteurs

$\|A \times B\|$ = L'aire du parallélogramme où $A$ et $B$ sont deux côtés consécutifs

= Le double de l'aire du triangle où $A$ et $B$ sont deux côtés adjacents.

## Produit mixte

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

## Signification géométrique du produit mixte

Si $A$, $B$ et $C$ sont trois vecteurs formant trois arêtes non parallèles deux à deux d'un parallélépipède, alors le volume du parallélépipède = la valeur absolue du produit mixte $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$

## Vecteur de position

1- Si l, m et n sont les cosinus des angles directeurs d'une droite, alors le vecteur $d = k\,(l;m;n)$ représente le vecteur directeur de la droite et on le note $d = k\,(a;\ b\ ;c)$. Les nombres (*a ; b ; c*) sont les rapports directeurs de la droite.

2- Un vecteur directeur d'une droite peut prendre plusieurs formes comme

$d = 2(l;m;n) = 3(l;m;n) = -4(l;m;n) = \ldots\ldots$

## Equation de la droite

L'équation de la droite passant par le point des coordonnées $(x_1;y_1;z_1)$ et ayant pour vecteur directeur le vecteur $d=(a;b;c)$ est de la forme $r=(x_1;y_1;z_1)+k\,(a;b;c)$

Les équations paramétriques de la droite sont $x=x_1+ka,\ y=y_1+kb,\ z=z_1+kc$

L'équation cartésienne de la droite est $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$

## Angle entre deux droites :

Si $d_1$ et $d_2$ sont deux vecteurs directeurs de deux droites, alors la mesure de l'angle entre les deux droites est

$$\cos\theta=\frac{|d_1\cdot d_2|}{\|\vec{d_1}\|\cdot\|\vec{d_2}\|}$$

Si $(l_1;m_1;n_1)$ et $(l_2;m_2;n_2)$ sont les cosinus des angles directeurs des deux droites, alors

$$\cos\theta=|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|$$

## Conditions de parallélisme et de perpendicularité de deux droites

Si $d_1=(a_1;b_1;c_1)$ et $d_2=(a_2;b_2;c_2)$ sont des vecteurs directeurs de deux droites, alors:

- Les deux droites sont parallèles si

$\vec{d_1}=k\vec{d_2}$ ou $\vec{d_1}\times\vec{d_2}=\vec{0}$ ou $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$

- Les deux droites sont perpendiculaires si $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

## Equation d'un plan :

L'équation du plan passant par le point des coordonnées $(x_1;y_1;z_1)$ et ayant pour vecteur directeur orthogonal au plan le vecteur $n=(a;b;c)$ est

- Forme vectorielle : $\vec{n}\cdot\vec{r}=\vec{n}\cdot(x_1;y_1;z_1)$
- Forme standard : $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$
- Forme générale : $ax+by+cz+d=0$ où $d=-ax_1-by_1-cz_1$

## Angle entre deux plans

Si $n_1 = (a_1;b_1;c_1)$ et $n_2 = (a_2;b_2;c_2)$ sont deux vecteurs directeurs orthogonaux aux deux plans, alors la mesure de l'angle entre les deux plans est donnée par la relation

$$\cos\theta = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{\|\overrightarrow{n_1}\| \cdot \|\overrightarrow{n_2}\|} \quad \text{où } 0 \le \theta \le 90°$$

## Deux plans parallèles et deux plans perpendiculaires :

Si $n_1$ et $n_2$ sont deux vecteurs directeurs orthogonaux à deux plans, alors la condition du parallélisme des deux plans est :

$$\overrightarrow{n_1} // \overrightarrow{n_2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

La condition de perpendicularité des deux plans est :

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

## Longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point sur un plan:

- La longueur de la perpendiculaire abaissée du point $\mathrm{A}(x_1;y_1;z_1)$ sur le plan passant par le point $\mathrm{B}(x_2;y_2;z_2)$ et ayant pour vecteur directeur orthogonal au plan le vecteur $n = (a\ ;\ b\ ;\ c)$ est :

$$L = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|n\|} \qquad \text{Forme vectorielle}$$

Ou la longueur de la perpendiculaire abaissée du point $\mathrm{A}(x_1;y_1;z_1)$ sur le plan dont l'équation $ax + by + cz = 0$

$$L = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad \text{Forme cartésienne}$$

## Équation d'un plan en fonction des parties coupées des trois axes du repère

Si un plan coupe les trois axes du repère aux points

$(x_1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $(0\ ;\ y_1\ ;\ 0)$ et $(0\ ;\ 0\ ;\ z_1)$,

alors l'équation du plan est sous la forme:

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 1$$




# مفاهيم الرياضيات التطبيقية

# الديناميكا

## الصف الثالث الثانوى